ADVANCES IN MATHEMATICS **125**, 171–199 (1997)
ARTICLE NO. AI971604

Algèbres des chemins quantiques

Claude Cibils

University of Geneva, Switzerland

et

Marc Rosso

University Louis Pasteur, Strasbourg, France

Received November 17, 1994

L'algèbre associative des chemins d'un carquois fini admet une structure d'algèbre de Hopf si et seulement si ce carquois est le graphe de Cayley d'un groupe fini relatif à une application $G \rightarrow \mathbf{N}$ constante sur les classes de conjugaison. La classification des bimodules de Hopf sur une algèbre de groupe fini fournit la liste des structures quantiques que l'on peut installer sur ces algèbres des chemins. Les groupes quantiques associés à des matrices de Cartan symétriques sont des quotients de l'algèbre des chemins de graphes de Cayley de groupes abéliens.

Table des matières

1. INTRODUCTION

Les développements récents de la théorie des groupes quantiques conduisent à tenter de décrire les algèbres associatives non commutatives susceptibles d'admettre une structure d'algèbre de Hopf non cocommutative. Dans ce travail nous considérons l'algèbre des chemins d'un carquois Q, c'est à dire le module libre sur un anneau k dont une base est l'ensemble des chemins orientés d'un graphe orienté fini Q muni de la multiplication déterminée par la concaténation des chemins. Cette k-algèbre est isomorphe à l'algèbre tensorielle du bimodule déterminé par les flèches de Q sur la

0001-8708/97 $25.00

k-algèbre commutative des applications de Q_0 dans k, où Q_0 est l'ensemble des sommets de Q.

Nous montrons que l'algèbre des chemins d'un carquois fini Q admet une structure d'algèbre de Hopf graduée si et seulement si Q est le graphe de Cayley d'un groupe fini G par rapport à une application appelée marquage $m: G \to \{0, 1, 2, ...\}$ constante sur les classes de conjugaison: les éléments de G sont les sommets de ce graphe et le nombre de flèches de x à y est $m(x^{-1}y)$ pour x et y des éléments de G. La description des structures quantiques sur ces algèbres fait appel aux représentations de sous-groupes de G. Cela résulte de la classification des bimodules de Hopf (aussi appelés bimodules bicovariants) de l'algèbre du groupe G, leur catégorie est équivalente au produit des catégories de représentations des centralisateurs des classes de conjugaison de G.

Les bimodules de Hopf ont d'abord été considérés par Nichols ([8]) pour les groupes abéliens finis et Woronowicz ([13]) les a étudiés en relation avec le calcul différentiel sur les groupes quantiques, voir aussi [9]. La classification que nous obtenons des kG-bimodules de Hopf, spécifiée pour $k = \mathbf{C}$ et G un groupe fini, fait apparaître un rapport étroit avec celle des modules irréductibles sur le double de Drinfeld de $\mathbf{C}G$ établie par Dijkgraaf, Pasquier et Roche dans [2]. Ce lien s'explique par le fait que pour une algèbre de Hopf H, la catégorie des H-bimodules de Hopf est équivalente à celle des modules sur le double de Drinfeld de H, voir [10]. En fait il est possible de reconsidérer directement la classification de [2]: à la section 3 nous établissons que lorsque G est un groupe fini et k un anneau quelconque, les modules sur le double de Drinfeld de l'algèbre des fonctions de G dans k forment une catégorie équivalente à celle obtenue pour les bimodules de Hopf, à savoir le produit des catégories de représentations des centralisateurs des classes de conjugaison.

A la section 4 nous montrons que les groupes quantiques associés aux matrices de Cartan symétriques ([3–6]) s'obtiennent au moyen d'un quotient spécifique de l'algèbre tensorielle $T_{kG}B$, pour G un groupe abélien et B un kG-bimodule de Hopf. Ce résultat découle de la présentation par générateurs et relations de l'algèbre $T_{kG}B$ que nous établissons grâce à la classification des bimodules de Hopf. La présentation obtenue s'inscrit dans un cadre plus général: l'algèbre tensorielle $T_H B$ d'un bimodule de Hopf B sur une k-algèbre de Hopf quelconque H est un produit croisé $H \otimes T_k D$, où D est le sous-espace des co-invariants de B.

Dans le cas où G est un groupe cyclique d'ordre n avec un marquage dont le support est un générateur, l'algèbre des chemins du graphe de Cayley a été considérée dans [1]. Les racines n-ièmes de l'unité correspondent aux représentations irréductibles de ce groupe cyclique et elles fournissent la liste des structures quantiques de cette algèbre de chemins. Si la racine est primitive il existe un quotient isomorphe à la sous-algèbre positive $\bar{U}_q^+(sl_2)$ du quotient de dimension finie du groupe quantique $U_q(sl_2)$. Les résulats mentionnés de la section 4 élargissent cette étude à tous les groupes quantiques.

Finalement nous étudions en détail le cas où G est un groupe commutatif. Lorsque k est un corps contenant les racines de l'unité d'ordre l'exposant de G, la transformée de Fourier des kG-bimodules de Hopf permet de montrer que pour B un kG-bimodule de Hopf, l'algèbre $T_{kG}B$ est isomorphe à une algèbre $T_{k^G}B'$ qui est l'algèbre des chemins d'un carquois. Il est alors possible de déterminer les algèbres de Hopf $T_{kG}B$ isomorphes à $T_{k^G}B^*$ et de montrer que $T_{kG}B$ admet une base multiplicative.

2. ALGÈBRE TENSORIELLE

Soit k un anneau et A une k-algèbre. L'algèbre tensorielle $T_A(M)$ d'un A-bimodule M est le A-module $A \oplus M \oplus M \otimes_A M \oplus \cdots$ muni du produit déterminé par le produit tensoriel des éléments. Soit maintenant H une algèbre de Hopf. Un *H-bimodule de Hopf* est un H-bimodule B qui est aussi un H-bicomodule dont les morphismes de structure $\delta_1: B \to B \otimes H$ et $\delta_2: B \to H \otimes B$ sont des morphismes de H-bimodule ($B \otimes H$ et $H \otimes B$ sont des H-modules à gauche et à droite via la comultiplication de H). Il revient au même de considérer les H-bicomodules B qui sont des H-bimodules et dont les flèches de structure sont des morphismes de H-bicomodule. Le produit tensoriel au dessus de H de deux bimodules de Hopf est un bimodule de Hopf, le H-bimodule de Hopf trivial est H lui-même au sens qu'il est l'unité de ce produit tensoriel.

Si l'algèbre tensorielle $T = T_A(M)$ d'un A-bimodule M est une algèbre de Hopf graduée pour sa graduation naturelle, alors l'algèbre A est une algèbre de Hopf et il est immédiat que la comultiplication de T fournit une structure de A-bimodule de Hopf sur M.

Nichols et Takeuchi [8, 12] ont noté qu'inversement un bimodule de Hopf fournit toujours une structure d'algèbre de Hopf sur l'algèbre tensorielle; il est intéressant d'en rappeler la preuve.

LEMME 2.1. *Soit H une algèbre de Hopf et B un H-bimodule de Hopf. La bigèbre $T = T_H(B)$ admet un antipode.*

Preuve. Le produit de convolution $*$ de $End_k H$ est donné par $f * g = \mu(f \otimes g)\Delta$ ou μ est le produit de H et Δ son coproduit. Montrons d'abord que si un endomorphisme f de T est l'unité de $End_k H$ lorsqu'il est restreint à H il est inversible pour le produit de convolution de $End_k T$. Considérons $h = 1 - f$; le fait que $h = 0$ sur H implique que h^{*n} est nul sur $\bigoplus_{k \geqslant n} T^k$, ce qui montre que $\sum_{n\geqslant 0} h^{*n}$ est un endomorphisme bien défini car il ne comporte que des sommes finies en chaque degré. Il est l'inverse de $1-h=f$.

Pour démontrer le lemme considérons S l'antipode de H, c'est à dire l'inverse de id_H pour le produit de convolution de $End_k(H)$, et soit $\bar{S}$ un endomorphisme de T coïncidant avec S sur H. Les endomorphismes $id_T * \bar{S}$ et $\bar{S} * id_T$ sont l'unité de $End_k H$ lorsqu'ils sont restreints à H et le résultat précédent indique qu'ils sont inversibles dans $End_k T$; il suit que id_T est aussi inversible.

La discussion suivante permettra d'entreprendre la classification des algèbres de chemins de carquois du point de vue de leur structure d'algèbre de Hopf.

Soit k un anneau, Q_0 un ensemble et k^{Q_0} la k-algèbre commutative des fonctions $f: Q_0 \to k$. Un moyen de décrire des k^{Q_0}-bimodules est le suivant: un carquois Q sur l'ensemble Q_0 est la donnée d'un ensemble Q_1 de flèches et de deux applications $s, t: Q_1 \to Q_0$ désignant la source et le terminus de chaque flèche. Un carquois est dit fini si Q_1 est fini. Le k-module k^{Q_1} est un k^{Q_0}-bimodule via $(\lambda f)(a) = \lambda(t(a))\, f(a)$ et $(f\lambda)(a) = f(a)\, \lambda(s(a))$ pour $f \in k^{Q_1}$, $\lambda \in k^{Q_0}$ et $a \in Q_1$. Le sous-module kQ_1 des fonctions à support fini sur Q_1 est un sous k^{Q_0}-bimodule de k^{Q_1} dont les composantes isotypiques sont déterminées par les couples de sommets.

Lorsque Q_0 est un ensemble fini, les carquois finis sur Q_0 sont en bijection avec les k^{Q_0}-bimodules dont les composantes isotypiques sont libres de génération finie, ceci car leurs k-rangs déterminent la classe d'isomorphisme du bimodule. Le nombre de flèches joignant deux sommets correspondants à une composante isotypique est le rang de celle-ci.

Un chemin de longueur n d'un carquois Q est une suite de flèches $a_n \cdots a_1$ vérifiant $s(a_i) = t(a_{i-1})$ pour $i = 2, ..., n$. On note Q_n l'ensemble des chemins de longueur n du carquois Q; les applications source et terminus s'étendent naturellement à Q_n ce qui munit k^{Q_n} d'une structure de k^{Q_0}-bimodule. Lorsque Q_1 est fini ce bimodule est isomorphe à $k^{Q_1} \otimes_{k^{Q_0}} k^{Q_1} \otimes_{k^{Q_0}} \cdots \otimes_{k^{Q_0}} k^{Q_1}$. On note C l'ensemble de tous les chemins de Q; c'est un ensemble muni d'une multiplication partielle et associative définie par la concaténation des chemins lorsqu'elle est possible. Ce produit est cofini au sens que pour un chemin γ il n'existe qu'un nombre fini de couples de chemins (β, α) dont le produit est γ; cela montre que l'algèbre suivante est bien définie:

DÉFINITION. L'algèbre complète de chemins d'un carquois Q est le k-module des fonctions k^C muni de la multiplication donnée par $fg(\gamma) = \sum_{\beta\alpha=\gamma} f(\beta)\, g(\alpha)$. L'algèbre des chemins kQ d'un carquois Q est la sous-algèbre de k^C contenant k^{Q_0} et les fonctions à support fini contenu dans l'ensemble des chemins de longueur positive. Cette algèbre est isomorphe à l'algèbre tensorielle $T_{k^{Q_0}} kQ_1$. Noter d'une part que l'unité de k^{Q_0} à pour support tout Q_0, ce qui force à considérer en degré zèro l'algèbre k^{Q_0} et non seulement les fonctions à support fini sur Q_0. D'autre part k^C et kQ ne coïncident que lorsque Q est fini et sans cycles orientés.

Nous nous proposons de classifier les structures quantiques graduées supportées par les algèbres de carquois fini. Au vu des résultats du début de cette section, cette classification se fait à partir des deux classifications suivantes:

(a) structures d'algèbres de Hopf sur une k-algèbre associative de fonctions sur un ensemble fini.

(b) bimodules de Hopf sur les algèbres de Hopf obtenues en (a).

La première étape est sans difficulté et relève du fait que les schémas en groupe constants finis proviennent des groupes finis. Le lemme suivant en donne la version qui nous est utile:

LEMME 2.2. *Soit Q_0 un ensemble fini et k^{Q_0} la k-algèbre semi-simple commutative des fonctions sur Q_0. Les structures d'algèbre de Hopf sur k^{Q_0} sont en bijection avec les structures de groupe sur Q_0.*

Preuve. Commençons par noter que l'ensemble des fonctions $\{\delta_x\}_{x\in Q_0}$ définies par $\delta_x(y)=0$ si $x\neq y$ et $\delta_x(y)=1$ si $x=y$ est le système complet d'idempotents orthogonaux primitifs de cette algèbre.

Lorsque Q_0 est un groupe on munit k^{Q_0} de la structure d'algèbre de Hopf duale de celle de l'algèbre de groupe: $\Delta(\delta_x)=\sum_{yz=x}\delta_y\otimes\delta_z$ pour tout $x\in Q_0$, $S(\delta_x)=\delta_{x^{-1}}$ et $\varepsilon(\delta_x)=0$ si $x\neq 1$ et $\varepsilon(\delta_1)=1$.

Réciproquement supposons k^{Q_0} munie d'une structure d'algèbre de Hopf. La base Q_0 de l'algèbre duale vérifie $\Delta(x)=x\otimes x$ pour tout $x\in Q_0$ car les éléments $\{\delta_x\}_{x\in Q_0}$ sont idempotents othogonaux et forment une base de k^{Q_0}. Cette propriété s'exprime en disant que les éléments de Q_0 sont des "group-like". En fait il n'y en a pas d'autres car les group-like sont linéairement indépendants, voir par exemple [11], et Q_0 est déjà une base. Or la totalité des group-like forment un groupe pour la multiplication de l'algèbre de Hopf, donc $(k^{Q_0})^*$ est l'algèbre de Hopf du groupe Q_0 et k^{Q_0} son algèbre duale.

3. BIMODULES DE HOPF D'UN GROUPE

Rappelons que le graphe de Cayley d'un groupe G par rapport à une application appelée marquage $m: G\to\{0, 1, 2, ...\}$ a pour sommets l'ensemble des éléments de G, le nombre de flèches de x à y est $m(x^{-1}y)$ pour x

et $y \in G$. Lorsque m associe la valeur 1 à un système de générateurs de G et 0 aux éléments restants, le graphe de Cayley est celui que l'on considère habituellement.

Nous nous proposons d'établir le résultat suivant:

THÉORÈME 3.1. *Soit Q un carquois fini. L'algèbre des chemins de Q sur un anneau k admet une structure d'algèbre de Hopf graduée si et seulement si Q est le graphe de Cayley d'un groupe fini G par rapport à un marquage constant sur les classes de conjugaison.*

Nous avons remarqué que si kQ est une algèbre de Hopf graduée alors k^{Q_0} est une algèbre de Hopf et kQ_1 un k^{Q_0}-bimodule de Hopf. Le lemme 2.2 montre que Q_0 reçoit alors une structure de groupe; l'étape suivante consiste donc à classifier les bimodules de Hopf sur k^{Q_0} et à vérifier que les carquois déterminés par les rangs des composantes isotypiques des bimodules de Hopf sont des graphes de Cayley. Réciproquement, il sera aisé d'établir qu'un graphe de Cayley de Q_0 par rapport à un marquage de Q_0 peut être réalisé en tant que carquois d'un bimodule de Hopf ad-hoc. En fait nous donnerons la liste complète des bimodules de Hopf dont le graphe de Cayley est fixé.

Soit donc G un groupe fini et k un anneau. Nous nous proposons de décrire la catégorie $b_k(k^G)$ des k^G-bimodules de Hopf k-libres de rang fini. Commençons par établir la dualitée suivante:

LEMME 3.2. *Soit H un algèbre de Hopf k-libre de rang fini sur un anneau k. La catégorie $b_k(H)$ des bimodules de Hopf k-libres de rang fini est anti-équivalente à $b_k(H^*)$.*

Preuve. Si B est un H-bimodule de Hopf son dual $B^* = \mathrm{Hom}_k(B, k)$ est un H^*-bimodule de Hopf par la construction analogue à celle qui fait de H^* une algèbre de Hopf. Par exemple la structure de H^*-module gauche de B^* se déduit de la structure de H-comodule gauche de B, on a $\delta_1 : B \to H \otimes B$ qui fournit $\delta_1^* : H^* \otimes B^* \to B^*$. Les vérifications sont sans difficulté. Au moyen de l'isomorphisme canonique d'évaluation entre un k-module libre de rang fini et son double dual on obtient une identification entre les bimodules de Hopf B et B^{**}.

Il est plus aisé de décrire les bimodules de Hopf sur l'algèbre du groupe kG plutôt que sur l'algèbre de Hopf duale k^G, le lemme précédent permet de se ramener à ce cas. De plus la classification des kG-bimodules de Hopf ne fait pas appel à la finitude de G.

Notations. Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des classes de conjugaison d'un groupe quelconque G. Dans chaque classe $C \in \mathscr{C}$ choisissons un élément $u(C)$; le centralisateur de $u(C)$ est noté $Z_{u(C)}$ et la catégorie des $kZ_{u(C)}$-modules à droite $Mod\,kZ_{u(C)}$.

PROPOSITION 3.3. *La catégorie $\mathscr{B}(kG)$ de tous les kG-bimodules de Hopf est équivalente au produit cartésien des catégoies* $\times_{C\in\mathscr{C}} Mod\,kZ_{u(C)}$.

Remarque 3.4. Un autre choix d'éléments par classes de conjugaison amène des centralisateurs conjugués. Les catégories de modules sur ces centralisateurs sont bien sûr équivalentes.

Remarque 3.5. Cette proposition est valable pour tout anneau k. En particulier si k est un corps dont la caractéristique divise l'ordre d'un groupe fini G on déduit la non semi-simplicité de $\mathscr{B}(kG)$ de celle de $\times_{C\in\mathscr{C}} Mod\,kZ_{u(C)}$: les kG-bimodules de Hopf ne sont pas dans ce cas complétement réductibles.

W. D. Nichols [8] a initié la classification de la proposition 3.3 pour les groupes abéliens finis sur un corps de caractéristique zéro contenant les racines $|G|$-ièmes de l'unité.

En restreignant la description que nous obtenons des kG-bimodules de Hopf à celle des bimodules de Hopf irréductibles d'un groupe fini sur le corps **C** des complexes, il apparaît que ceux-ci coïncident avec les modules irréductibles du double de Drinfeld donnés par Dijkgraaf, Pasquier et Roche dans [2]. En fait lorsque H est une algèbre de Hopf, la catégorie des H-bimodules de Hopf est équivalente à celle des modules sur le double de H, voir [10]. La classification de [2] fait appel aux résultats de Lusztig ([7]) qui permettent de déterminer la semi-simplicité du double de Drinfeld de $\mathbf{C}G$ lorsque G est fini, tandis que nous déduisons de notre approche les conditions pour que la catégorie des kG-bimodules de Hopf soit semi-simple lorsque k est un anneau quelconque, voir à ce sujet la remarque 3.5.

Preuve de la proposition 3.3. Décrivons le foncteur de construction V qui associe un kG-bimodule de Hopf VM à une collection de modules $M=\{M(C)\}_{C\in\mathscr{C}}$ au-dessus de chaque classe de conjugaison, avec $M(C)\in Mod\,kZ_{u(C)}$. Le k-module VM est bigradué par G, il est la somme directe des k-modules $M(\Gamma(x^{-1}y))={}^{y}VM^{x}$ où $\Gamma(x^{-1}y)$ désigne la classe de conjugaison de $x^{-1}y$. La structure de bicomodule sur $VM=\bigoplus {}^{y}VM^{x}$ est définie de sorte que cette décomposition soit celle en cocomposantes isotypiques, c'est à dire que les morphismes de structure $\delta_1\colon VM\to kG\otimes VM$ et $\delta_2\colon VM\to VM\otimes kG$ sont donnés par $\delta_1(v)=y\otimes v$ et $\delta_2(v)=v\otimes x$ lorsque $v\in {}^{y}VM^{x}$. Il n'y a pas de difficulté à vérifier que VM est un kG-bicomodule. Pour munir VM d'une structure de kG-bimodule de sorte qu'il devienne un kG-bimodule de Hopf il est utile de remplacer la cocomposante isotypique $M(\Gamma(x^{-1}y))$ par un k-module qui lui est isomorphe tout en étant propice à la description des actions de G sur VM.

Remarquons d'abord qu'il existe une bijection évidente entre les éléments d'une classe de conjugaison C et les classes à gauche du centralisateur de l'un de ses éléments: à $z \in C$ on associe la classe à gauche $Z_{u(C)}t$ où t est un élément qui conjugue $u(C)$ en z (on a $t^{-1}u(C)t = z$, d'où l'on voit que t n'est défini qu'à multiplication à gauche près par un élément du centralisateur $Z_{u(C)}$). La classe à gauche ainsi décrite est notée $E(z)$, elle ne dépend que du choix $u(C)$ d'un élément par classe de conjugaison C.

Nous remplaçons $M(\Gamma(x^{-1}y))$ par $M(\Gamma(x^{-1}y)) \otimes_{kZ_{u(\Gamma(x^{-1}y))}} kE(x^{-1}y)$, où le k-module $kE(x^{-1}y)$ est un $kZ_{u(\Gamma(x^{-1}y))}$-module à gauche libre de rang un, d'où l'isomorphisme de k-modules évoqué.

Remarquons que ${}^{y}VM^{x}$ et ${}^{sy}VM^{sx}$ désignent le même k-module lorsque s, x et y sont des éléments de G. Nous définissons l'action à gauche de G sur VM de sorte qu'elle soit essentiellement la représentation régulière gauche de G: l'endomorphisme dû à s envoi chaque cocomposante isotypique ${}^{y}VM^{x}$ identiquement sur ${}^{sy}VM^{sx}$.

L'action à droite utilise les structures de module dont les divers $M(C)$ sont équipés: un élément s de G transforme la cocomposante isotypique ${}^{y}VM^{x}$ en ${}^{ys}VM^{xs}$ de la façon suivante: soit $m \otimes t$ un élément de

$$M(\Gamma(x^{-1}y)) \underset{kZ_{u(\Gamma(x^{-1}y))}}{\otimes} kE(x^{-1}y) \qquad \text{avec} \quad t \in E(x^{-1}y).$$

On pose $(m \otimes t)s = m \otimes ts$ et on a bien

$$m \otimes ts \in M(\Gamma(s^{-1}x^{-1}ys)) \underset{kZ_{u(\Gamma(s^{-1}x^{-1}ys))}}{\otimes} kE(s^{-1}x^{-1}ys)$$

car d'une part $\Gamma(s^{-1}x^{-1}ys)$ et $\Gamma(x^{-1}y)$ désignent la même classe de conjugaison et d'autre part ts est un élément de la classe à gauche associée à $s^{-1}x^{-1}ys$. En effet, si t est un élément tel que $t^{-1}u(\Gamma(x^{-1}y))\,t = x^{-1}y$ alors $s^{-1}t^{-1}u(\Gamma(x^{-1}y))\,ts = s^{-1}x^{-1}ys$.

La formule de l'action à droite a une forme simple tout en faisant intervenir de façon essentielle les modules sur les centralisateurs puisque le produit tensoriel est effectué sur les algèbres de groupe de ceux-ci. Il s'agit en fait de l'induction des modules: si Z est un sous-groupe de G et M est un kZ-module à droite le kG-module induit est $M \otimes_{kZ} kG = \bigoplus_{E} (M \otimes_{kZ} kE)$ où E parcourt les classes à gauche de Z dans G. La formule de l'action de G est $(m \otimes t)s = m \otimes ts$.

Il reste à vérifier que la structure obtenue est bien celle d'un kG-bimodule de Hopf. Montrons que l'action à droite fournit un morphisme $a_2\colon VM \otimes kG \to VM$ de comodules à droite. Rappelons que $VM \otimes kG$ est un comodule à droite grâce à la multiplication μ de kG: le morphisme

$VM \otimes kG \xrightarrow{f} VM \otimes kG \otimes kG$ faisant de $VM \otimes kG$ un comodule à droite est le composé

$$VM \otimes kG \xrightarrow{\delta_2 \otimes \Delta} VM \otimes kG \otimes kG \otimes kG \xrightarrow{id \otimes \tau \otimes id} VM \otimes kG \otimes kG \otimes kG$$

$$\xrightarrow{id \otimes id \otimes \mu} VM \otimes kG \otimes kG.$$

Il est alors facile de vérifier $\delta_2 a_2 = (a_2 \otimes id)\, f$ en évaluant sur un élément $m \otimes s \otimes t \in {}^{y}VM^{x} \otimes kG$.

Les trois autres vérifications sont analogues. La définition de V au niveau des morphismes est dictée par la valeur de V sur les objets.

La description du foncteur inverse $W\colon \mathscr{B}(kG) \to \times_{C \in \mathscr{C}} Mod\, kZ_{u(C)}$ est rendue plus aisée par l'assertion suivante qui est de toute façon indispensable pour montrer que V et W sont inverses l'un de l'autre.

Assertion. Soit B un kG-comodule à droite d'homomorphisme de structure $\delta\colon B \to B \otimes kG$. Alors $B = \bigoplus_{x \in G} B^x$ où $B^x = \{ b \in G \mid \delta(b) = b \otimes x \}$. En effet, soit $b \in B$ et soit $\sum_{x \in G} b^x \otimes x$ la décomposition de $\delta(b)$ dans $B \otimes kG = \bigoplus_{x \in G} (B \otimes x)$. On a $b^x \in B^x$ car $(\delta \otimes id)\, \delta = (id \otimes \Delta)\, \delta$ où Δ est la comultiplication de kG; par ailleurs $\delta(b) = \delta(\sum_{x \in G} b^x)$ et donc $b = \sum_{x \in G} b^x$ car δ est injective, cela suit du fait que $(\varepsilon \otimes id)\delta = id_B$ où $\varepsilon\colon kG \to k$ est la coünité de kG. Lorsque B est un kG-bicomodule chaque cocomposante isotypique à droite B^x est un sous-comodule à gauche. L'assertion analogue à la précédente pour les comodules à gauche montre que $B = \bigoplus_{x, y \in G} {}^{y}B^{x}$.

Le foncteur W associe à un kG-bimodule de Hopf B la collection de k-modules $\{ {}^{u(C)}B^1 \}_{C \in \mathscr{C}}$. Chaque ${}^{u(C)}B^1$ est un $kZ_{u(C)}$-module à droite. En effet G opère sur B par translation des cocomposantes isotypiques, plus précisément $s\, {}^{y}B^{x} = {}^{sy}B^{sx}$ et ${}^{y}B^{x} s = {}^{ys}B^{ys}$, cela suit immédiatement du fait que les morphismes de structure de bimodule sont des morphismes de bicomodule. En conséquence l'action à gauche de s^{-1} suivie de l'action à droite de s sur un élément b de ${}^{u(C)}B^1$ fournit un élément $s^{-1}bs$ de ${}^{s^{-1}u(C)s}B^1$. La structure de $kZ_{u(C)}$-module à droite sur ${}^{u(C)}B^1$ est donc donnée par la conjugaison des actions: $b.z = z^{-1}bz$ lorsque $z \in Z_{u(C)}$. En ce qui concerne la définition de W sur les morphismes, observons qu'un morphisme de bimodules de Hopf $f\colon B \to B'$ préserve les cocomposantes isotypiques. Il s'ensuit une collection de morphismes $\{ {}^{u(C)}f^1\colon {}^{u(C)}B^1 \to {}^{u(C)}B'^1 \}_{C \in \mathscr{C}}$ et il est aisé d'établir que chaque ${}^{u(C)}f^1$ est un morphisme de $kZ_{u(C)}$-modules.

Montrons maintenant que V et W sont des foncteurs inverses l'un de l'autre. Nous allons établir un isomorphisme naturel φ de source un kG-bimodule de Hopf et de but le kG-bimodule de Hopf construit par V

à partir de WB. Rappelons que les cocomposantes isotypiques de VWB sont

$$\begin{aligned} {}^{y}(VWB)^{x} &= (WB)(\Gamma(x^{-1}y)) \underset{kZ_{\Gamma(x^{-1}y)}}{\otimes} kE(x^{-1}y) \\ &= {}^{u(\Gamma(x^{-1}y))}B^{1} \underset{kZ_{\Gamma(x^{-1}y)}}{\otimes} kE(x^{-1}y) \end{aligned}$$

où $\Gamma(x^{-1}y)$ dénote la classe de conjugaison de $x^{-1}y$ et $E(x^{-1}y)$ la classe à gauche $Z_{\Gamma(x^{-1}y)}t$ d'un élément t tel que $t^{-1}u(\Gamma(x^{-1}y))t = x^{-1}y$.

Nous savons que B est la somme directe de ses cocomposantes isotypiques. L'isomorphisme φ est la somme directe des isomorphismes de k-modules ${}^{y}\varphi^{x}\colon {}^{y}B^{x} \to {}^{y}(VWB)^{x}$ donné par $b \mapsto tx^{-1}bt^{-1} \otimes t$. Il est important de noter que ${}^{y}\varphi^{x}$ ne dépend pas du choix de l'élément t dans sa classe à gauche. En effet si $t' = zt$ avec $z \in Z_{u(\Gamma(x^{-1}y))}$ on a $t'x^{-1}bt'^{-1} \otimes t' = ztx^{-1}bt^{-1}z^{-1} \otimes zt = (ztx^{-1}bt^{-1}z^{-1}).z \otimes t = z^{-1}ztx^{-1}bt^{-1}z^{-1}z \otimes t = tx^{-1}bt^{-1} \otimes t$. L'avant-dernière égalité fait usage de l'action de $Z_{u(\Gamma(x^{-1}y))}$ à droite "par conjugaison" définie lors de la construction de W.

Le fait que φ préserve les cocomposantes isotypiques est équivalent à ce que φ soit un morphisme de kG-bicomodules. Il reste à vérifier que φ est équivariant par rapport aux actions gauche et droite, ce qui revient à constater que les diagrammes suivants commutent:

$$\begin{tikzcd} {}^{y}B^{x} \arrow[r, "s."] \arrow[d, "{}^{y}\varphi^{x}"'] & {}^{sy}B^{sx} \arrow[d, "{}^{sy}\varphi^{sx}"] \\ {}^{y}(VWB)^{x} \arrow[r, "s."] & {}^{sy}(VWB)^{sx} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} {}^{y}B^{x} \arrow[r, ".s"] \arrow[d, "{}^{y}\varphi^{x}"'] & {}^{ys}B^{xs} \arrow[d, "{}^{ys}\varphi^{xs}"] \\ {}^{y}(VWB)^{x} \arrow[r, ".s"] & {}^{ys}(VWB)^{xs} \end{tikzcd}$$

Nous avons d'une part $s(tx^{-1}bt^{-1} \otimes t) = tx^{-1}bt^{-1} \otimes t$ pour $b \in {}^{y}B^{x}$ et $t \in E(x^{-1}y)$ car l'action à gauche de G sur les cocomposantes isotypiques se fait par translations identiques. D'autre part la valeur de ${}^{sy}\varphi^{sx}(sb)$ s'obtient en choisissant un élément quelconque de $E((sx)^{-1}sy) = E(x^{-1}y)$. En choisissant le même t qu'auparavent nous obtenons ${}^{sy}\varphi^{sx}(sb) = t(sx)^{-1}sbt^{-1} \otimes t$ qui coïncide avec l'élément obtenu précédemment.

Le second diagramme fournit d'une part $(tx^{-1}bt^{-1} \otimes t)s = tx^{-1}bt^{-1} \otimes ts$ pour $b \in {}^{y}B^{x}$ et $t \in E(x^{-1}y)$; d'autre part ${}^{ys}\varphi^{xs}(bs)$ peut se décrire à l'aide de ts qui appartient à $E((xs)^{-1}ys)$ puisque $t^{-1}[u(\Gamma(x^{-1}y))]t = x^{-1}y$ et donc $s^{-1}t^{-1}[u(\Gamma(s^{-1}x^{-1}ys))]ts = s^{-1}x^{-1}ys$. De cette manière nous obtenons ${}^{ys}\varphi^{xy}(bs) = ts(xs)^{-1}bs(ts)^{-1} \otimes ts = tx^{-1}bt^{-1} \otimes ts$.

La naturalité de φ est facile à établir.

Considérons maintenant le foncteur WV. Si $M = \{M(C)\}_{C \in \mathscr{C}}$ est une collection de $kZ_{u(C)}$-modules à droite au-dessus de chaque classe de conjugaison C, décrivons un isomorphisme ψ: $M \to WVM$ en précisant la composante ψ_C pour chaque classe de conjugaison C:

$$M(C) \xrightarrow{\psi_C} {}^{u(C)}(VM)^1 = M(\Gamma u(C)) \bigotimes_{kZ_{u(\Gamma u(C))}} kE(u(C))$$
$$= M(C) \bigotimes_{kZ_{u(C)}} kZ_{u(C)}$$

est donnée par $\psi_C(m) = m \otimes 1$. Les vérifications se font sans difficulté.

Remarque 3.6. Les foncteurs V et W se restreignent aux sous-catégories pleines suivantes:

$b(kG) = kG$-modules de Hopf dont les cocomposantes isotypiques sont k-libres de rang fini.

$\times_{C \in \mathscr{C}} \, mod\, kZ_{u(C)} =$ produit cartésien des catégories de $kZ_{u(C)}$-modules à droite k-libres de rang fini.

Ces deux catégories sont donc équivalentes.

Il est intéressant de considérer les résultats de [2] lorsque k est un anneau arbitraire, de façon à décrire directement les modules sur le double de Drinfeld de k^G sans faire appel ni à l'équivalence citée de [10] ni à la proposition 3.3.

PROPOSITION 3.7. *Soient G un groupe fini et k un anneau. La catégorie de modules sur le double de Drinfeld de k^G est équivalente à $\times_{C \in \mathscr{C}} \, Mod\, kZ_{u(C)}$.*

Preuve. Le double de l'algèbre des fonctions k^G est isomorphe en tant qu'algèbre associative au produit croisé $k^G \otimes kG$ où G agit par l'action adjointe:

$$s \cdot f(x) = f(s^{-1}xs) \qquad \text{pour} \quad s \in G \quad \text{et} \quad f \in k^G.$$

Une représentation de ce produit croisé est alors donnée par un k^G-module V muni d'une structure de G-module π: $G \to Gl(V)$ telle que

$$(s \cdot f)\, v = \pi(s)\, f \pi(s)^{-1}\, v \qquad \text{pour} \quad s \in G, \quad f \in k^G \quad \text{et} \quad v \in V.$$

Soit $\{\delta_x\}_{x \in G}$ la base de k^G donnée par les masses de Dirac aux points de G. Ce sont des idempotents orthogonaux dont la somme est l'unité de k^G, si bien que $V = \bigoplus_{x \in G} V_x$ où $V_x = \delta_x V$.

Comme $s \cdot \delta_x = \delta_{sxs^{-1}}$, on voit que $\pi(s)$ réalise un isomorphisme entre les k-modules V_x et $V_{sxs^{-1}}$: tous les V_x pour x restant dans une classe de conjugaison sont isomorphes.

Rappellons que $\mathscr{C}$ est l'ensemble des classes de conjugaison, et que $u(C)$ est un élément choisi de chaque $C \in \mathscr{C}$. Pour $x \in C$ on fixe un élément s_x tel que $x = s_x u(C)\, s_x^{-1}$. Chaque s_x n'est bien déterminé qu'à un élément du centralisateur $Z_{u(C)}$ près, et notons que les $\{s_x\}_{x \in C}$ forment un système de représentants des classes à gauche de $Z_{u(C)}$ dans G.

V est somme directe de sous-modules $V(C)$, pour $C \in \mathscr{C}$, où $V(C)$ est somme de Card(C) copies de $V_{u(C)}$. Il suffit de s'intéresser à l'action de $k^G \otimes kG$ sur chacun de ces sous-modules, et en fait à celle de G puisque celle des δ_x est déterminée.

Notons que $V_{u(C)}$ est un $kZ_{u(C)}$-module et que les $\pi(s_x)$ réalisent des isomorphismes de $V_{u(C)}$ sur V_x. Alors, comme G-module

$$V(C) \simeq kG \otimes_{kZ_{u(C)}} V_{u(C)}.$$

On a ainsi construit un foncteur qui à V un module sur $k^G \otimes kG$ associe la famille des $(V_{u(C)})_{c \in \mathscr{C}}$. Le foncteur inverse est le suivant: si $(V_{u(C)})_{C \in \mathscr{C}}$ sont des $kZ_{u(C)}$-modules, on en fait d'abord des $k^G \otimes kZ_{u(C)}$-modules en posant que δ_x agit par zéro pour $x \neq u(C)$ et $\delta_{u(C)}$ par l'identité, puis on induit ce module à $k^G \otimes kG$.

Revenons au théorème 3.1 qui caractérise les carquois finis dont l'algèbre des chemins admet une structure d'algèbre de Hopf graduée.

Preuve du théorème 3.1. Soit Q un carquois fini et supposons kQ muni d'une structure d'algèbre de Hopf graduée. Nous avons établi au Lemme 2.2 que l'ensemble Q_0 de sommets est un groupe; le k^{Q_0}-bimodule kQ_1 fourni par les flèches de Q est un k^{Q_0}-bimodule de Hopf. Rappelons que k^{Q_0} est l'algèbre de Hopf commutative des fonctions sur le groupe Q_0.

Nous voulons montrer que Q est le graphe de Cayley de Q_0 par rapport à un certain marquage constant sur les classes de conjugaison. Notons que par construction le k-rang de la composante isotypique $\delta_y(kQ_1)\delta_x$ est égal au nombre de flèches de x vers y, qui est donc aussi le rang de la cocomposante isotypique ${}^y(kQ_1)^x$ du kQ_0-bimodule dual, où kQ_0 est l'algèbre du groupe, duale de k^{Q_0} (c.f. lemme 3.2).

La proposition 3.3 indique que ce kQ_0-bimodule de Hopf est construit à partir d'une collection de représentations $\{M(C)\}_{C \in \mathscr{C}}$ des centralisateurs des classes de conjugaison de Q_0. En particulier ${}^y(kQ_1)^x$ est un k-module isomorphe à $M(\Gamma(x^{-1}y))$ où $\Gamma(x^{-1}y)$ désigne la classe de conjugaison de $x^{-1}y$; le rang de cette cocomposante isotypique ne dépend donc que de la classe de conjugaison de $x^{-1}y$. En fait le marquage m de Q_0 pour lequel Q est le graphe de Cayley est donné par $m(x) = \mathrm{rang}_k M(\Gamma x)$.

Réciproquement soit G un groupe fini, m: $G \to \{0, 1, 2, ...\}$ un marquage constant sur les classes de conjugaison et Q le graphe de Cayley qui en résulte. L'algèbre des chemins de Q admet une structure d'algèbre de Hopf graduée si le kG-bicomodule déterminé par les flèches peut être muni d'une structure de kG-bimodule de Hopf. Les foncteurs de la preuve de la proposition 3.3 montrent que cela est possible dès qu'il existe une collection de modules à droite $\{M(C)\}_{C \in \mathscr{C}}$ avec $\operatorname{rang}_k M(C) = m(C)$. Il est toujours possible de prendre la représentation triviale de rang requis. Le jeu complet de représentations de rang fixé par m fournit la classification des structures de kG-bimodule de Hopf sur le kG-bicomodule des flèches.

Reformulons les résultats obtenus au cours de la preuve du théorème 3.1.

Soit G un groupe fini, k un anneau et B un objet de $b(kG)$, c'est à dire un kG-bimodule de Hopf dont les cocomposantes isotypiques sont k-libres de rang fini. On associe à B son carquois $\mathscr{Q}_B$ dont les sommets sont les éléments de G et dont le nombre de flèches de x à y est le rang de la cocomposante isotypique ${}^yB^x$.

PROPOSITION 3.8. *L'application $b(kG) \xrightarrow{\mathscr{Q}} \{\text{carquois de sommets } G\}$ donnée par $B \mapsto \mathscr{Q}_B$ a pour image les carquois de Cayley relatifs à un marquage constant sur les classes de conjugaison de G. Soit Q un carquois dans $\operatorname{Im} \mathscr{Q}$ relatif à un marquage m. La fibre de $\mathscr{Q}$ au-dessus de Q peut-être décrite au moyen du foncteur W:*

$$W\mathscr{Q}^{-1}(Q) = \{\{M(C)\}_{C \in \mathscr{C}} \mid \operatorname{rang}_k M(C) = m(C)\}$$

où $m(C)$ désigne la valeur prise par m sur un élément quelconque de la classe de conjugaison C.

Soulignons finalement que lorsque G est fini $b(kG)$ et $b(k^G)$ sont des catégories équivalentes au moyen de la dualité du lemme 3.2. Ce sont les bimodules de $b(k^G)$ qui permettent de construire l'algèbre de chemins équipée d'une structure quantique.

4. PRÉSENTATIONS ET GROUPES QUANTIQUES

Nous nous proposons de montrer que tout groupe quantique associé à une matrice de Cartan symétrique est le quotient par un idéal spécifique d'une algèbre de Hopf $T_{kG}B$ pour G un groupe abélien et B un kG-bimodule de Hopf particulier. Ce résultat peut s'étendre aux matrices de Cartan symétrisables en introduisant des notations plus lourdes, ce que nous ne ferons pas.

Tout d'abord nous établissons une présentation par générateurs et relations sur l'anneau k de l'algèbre de Hopf $T_{kG}(B)$ où G est un groupe quelconque et B un kG-bimodule de Hopf arbitraire. Cette présentation est obtenue au moyen de la classification de $\mathscr{B}(kG)$, effectuée à la section précédente. Nous l'inscrivons ensuite dans un contexte plus large, obtenu en remplaçant kG par une k-algèbre de Hopf quelconque.

Pour finir nous étudions des exemples en ordre croissant de complexité qui constituent une approche graduelle aux groupes quantiques de Drinfeld et Jimbo considérés à la fin de cette section (exemple 4.14).

Commençons par rappeler et compléter les notations. L'ensemble des classes de conjugaison de G est noté $\mathscr{C}$ et l'application $u: \mathscr{C} \to G$ choisit un élément par classe. Le centralisateur de $u(C)$ est noté $Z_{u(C)}$. Soient $y \in G$ et Γy sa classe de conjugaison; t_y désigne un élément qui conjugue $u(\Gamma y)$ en y, on a $t_y^{-1}[u(\Gamma y)]\, t_y = y$, tout autre choix t'_y diffère de t_y par multiplication à gauche par un élément de $Z_{u(\Gamma y)}$.

Considérons un objet $M = \{M(C)\}_{C \in \mathscr{C}}$ de $\times_{C \in \mathscr{C}} Mod\, kZ_{u(C)}$ qui constitue une donnée équivalente à celle d'un kG-bimodule de Hopf.

Définition. Considérons la réunion disjointe $[G] \sqcup F$, où $[G]$ est un ensemble dont les éléments sont en bijection avec ceux de G et sont notés $[g]$ pour chaque $g \in G$, et $F = \{(y, m) \mid y \in G \text{ et } m \in M(\Gamma y)\}$. L'algèbre $A_{kG}M$ est la k-algèbre associative libre engendrée par $[G] \sqcup F$ modulo l'idéal bilatère engendré par les éléments correspondant aux relations suivantes:

Type 1. La multiplication des éléments de $[G]$ dans $A_{kG}M$ est celle du groupe G: $[g][h] = [gh]$ et $[1_G] = 1$ pour g, h éléments de G.

Type 2. Les éléments de F dans $A_{kG}M$ sont k-linéaires en leur deuxième variable: $(y, m_1 + m_2) = (y, m_1) + (y, m_2)$ et $(y, \lambda m) = \lambda(y, m)$ pour $y \in G$ et m_1, m_2, m des éléments de $M(\Gamma y)$.

Type 3. Commutateur d'un élément de F avec un élément de $[G]$: $(y, m)[g] = [g](g^{-1}yg,\, m\zeta_{y,g})$ où $\zeta_{y,g}$ est l'élément de $Z_{u(\Gamma y)}$ déterminé par l'égalitée $t_y g = \zeta_{y,g} t_{g^{-1}yg}$.

Noter que $t_y g$ conjugue $u(\Gamma y)$ en $g^{-1}yg$, c'est aussi ce que fait $t_{g^{-1}yg}$ par définition. En conséquence $\zeta_{y,g} \in Z_{u(\Gamma y)}$ et $m\zeta_{y,g}$ désigne l'action à droite de $\zeta_{y,g}$ sur l'élément m du $kZ_{u(\Gamma y)}$-module $M(\Gamma y)$.

Proposition 4.1. *Soit VM un kG-bimodule de Hopf déterminé par $M \in \times_{C \in \mathscr{C}} \operatorname{Mod} kZ_{u(C)}$. Les k-algèbres $T_{kG}VM$ et $A_{kG}M$ sont isomorphes. De plus $A_{kG}M$ est une algèbre de Hopf par transport de structure: $\Delta[g] = [g] \otimes [g]$ pour $g \in G$ et $\Delta(y, m) = [y] \otimes (y, m) + (y, m) \otimes [1]$ pour $(y, m) \in F$.*

Preuve. Le kG-bimodule de Hopf VM est la somme directe de ses cocomposantes isotypiques ${}^{y}(VM)^{x} = M(\Gamma(x^{-1}y)) \otimes_{Z_{u(\Gamma(x^{-1}y))}} t_{x^{-1}y}$. Par ailleurs un morphisme de k-algèbres $\varphi: T_{kG}VM \to A$ est complètement déterminé par la donnée d'un morphisme de k-algèbres $\varphi_0: kG \to A$ et d'un morphisme de kG-bimodules $\varphi_1: VM \to A$ où A est muni de la structure de kG-bimodule obtenue via φ_0.

Pour décrire $\varphi: T_{kG} VM \to A_{kG} M$ posons $\varphi_0(g) = [g]$ pour $g \in G$. Considérons ensuite $m \otimes t_{x^{-1}y} \in {}^{y}(VM)^{x}$ et posons $\varphi_1(m \otimes t_{x^{-1}y}) = [x](x^{-1}y, m)$. Vérifions que φ_1 est biéquivariante. L'action à gauche de G sur VM est par translations identiques des cocomposantes isotypiques, si $m \otimes t_{x^{-1}y} \in {}^{y}(VM)^{x}$ on a $g(m \otimes t_{x^{-1}y}) = m \otimes t_{x^{-1}y} \in {}^{gy}(VM)^{gx}$. Ainsi

$$\begin{aligned}\varphi_1(g(m \otimes t_{x^{-1}y})) &= [gx](x^{-1}y, m) = [g][x](x^{-1}y, m)\\ &= \varphi_0(g)\, \varphi_1(m \otimes t_{x^{-1}y}).\end{aligned}$$

Par ailleurs l'action à droite de G sur VM transforme ${}^{y}(VM)^{x}$ en ${}^{yg}(VM)^{xg}$:

$$(m \otimes t_{x^{-1}y})g = m \otimes t_{x^{-1}y}g = m \otimes \zeta_{x^{-1}y, g} t_{g^{-1}x^{-1}yg} = m\zeta_{x^{-1}y, g} \otimes t_{g^{-1}x^{-1}yg}.$$

Ainsi $\varphi_1((m \otimes t_{x^{-1}y})g) = [xg](g^{-1}x^{-1}yg, m\zeta_{x^{-1}y, g})$ tandis que

$$\varphi_1(m \otimes t_{x^{-1}y})\, \varphi_0(g) = [x](x^{-1}y, m)[g] = [xg](g^{-1}x^{-1}yg, m\zeta_{x^{-1}y, g}).$$

Pour construire $\psi: A_{kG} M \to T_{kG} VM$ posons $\psi[g] = g$ pour $g \in G$ et $\psi(y, m) = m \otimes t_y \in {}^{y}(VM)^{1}$ pour $(y, m) \in F$, ce qui définit ψ sur la k-algèbre associative libre engendrée par $[G] \sqcup F$. Les relations de type 1 et 2 définissant le quotient $A_{kG} M$ sont préservées par ψ. Les relations de type 3 le sont aussi:

$$\begin{aligned}\psi((y, m)[g]) &= \psi(y, m)\, \psi[g]\\ &= (m \otimes t_y)g = m \otimes t_y g = m \otimes \zeta_{y, g} t_{g^{-1}yg} \in {}^{yg}(VM)^{g}.\\ \psi([g](g^{-1}yg, m\zeta_{y, g})) &= g(m\zeta_{y, g} \otimes t_{g^{-1}yg})\\ &= m\zeta_{y, g} \otimes t_{g^{-1}yg} \in g({}^{g^{-1}yg}(VM)^{1})\\ &= {}^{yg}(VM)^{g}.\end{aligned}$$

Il est clair que φ et ψ sont inverses l'un de l'autre.

La structure d'algèbre de Hopf de $T_{kG} VM$ est donnée par celle de kG en degré zéro et par celle du bicomodule VM en degré 1: si $a \in {}^{y}(VM)^{x}$ alors $\Delta(a) = \delta_1(a) + \delta_2(a) = a \otimes x + y \otimes a$. Puisque $(y, m) = \varphi(m \otimes t_y)$ avec $(y, m) \in {}^{y}(VM)^{1}$, on obtient $\Delta(y, m) = (y, m) \otimes [1] + [y] \otimes (y, m)$. Aussi par transport de structure la coünité de $A_{kG} M$ est donnée par $\varepsilon[g] = 1$ pour $g \in G$ et $\varepsilon(y, m) = 0$ pour $(y, m) \in F$. L'antipode est déterminée par le lemme 2.1.

Remarque 4.2. Un élément $(y, m) \in F$ de l'algèbre de Hopf $A_{kG} M$ est dit de cosource 1 et coterminus y, car son image par ψ dans $T_{kG} VM$

est dans la cocomposante isotypique ${}^{y}(VM)^{1}$. De même $[g](y,m)$ est de cosource g et coterminus gy. Noter que

$$\Delta([g](y,m)) = \Delta[g]\,\Delta(y,m) = [gy] \otimes (y,m) + (y,m) \otimes [g].$$

La proposition que nous venons d'établir fournit une description explicite de l'algèbre $T_{kG}B$, où G est un groupe quelconque et B un kG-bimodule de Hopf. Les résultats de structure des bimodules de Hopf sur une k-algèbre de Hopf arbitraire H (voir [9, 11, 13]) permettent de présenter l'algèbre $T_H B$ comme un produit croisé.

THÉORÈME 4.3. *Soit B un H-bimodule de Hopf et $D = \{d \in B \mid \delta_1(d) = 1 \otimes d\}$ le k-module des co-invariants à gauche, où $\delta_1 : B \to H \otimes B$ est le morphisme de structure du H-comodule à gauche B. Alors $T_H B$ est une k-algèbre isomorphe au produit croisé $H \otimes T_k D$ dont le produit est déterminé par celui de H sur $H \otimes 1$, celui de $T_k D$ sur $1 \otimes T_k D$ et par*

$$(h \otimes 1)(1 \otimes d) = (h \otimes d), \qquad (1 \otimes d)(h \otimes 1) = \sum h_{(1)} \otimes S(h_{(2)})\, dh_{(3)}$$

pour $d \in D$, $h \in H$; on note S l'antipode, Δ la comultiplication, et $\Delta^2 h = \sum h_{(1)} \otimes h_{(2)} \otimes h_{(3)}$ pour $h \in H$.

Remarque 4.4. Dans le cas d'une algèbre de groupe kG, les co-invariants à gauche D d'un kG-bimodule de Hopf VM correspondent à M, où $M \in \times_{C \in \mathscr{C}} Mod\, kZ_{u(C)}$. L'algèbre produit croisé $kG \otimes T_k D$ de l'énoncé du théorème coïncide alors avec l'algèbre $A_{kG}M$ définie au début de cette section.

Preuve de 4.3. Par le théorème de structure des bimodules de Hopf B sur une algèbre de Hopf H (voir par exemple [9]), on a que $\varphi: H \otimes D \to B$ donnée par $\varphi(h \otimes d) = hd$ est un isomorphisme de modules et comodules à gauche. De plus D est muni d'une structure de H-module à droite donnée par

$$d \cdot h = \sum S(h_{(1)})\, dh_{(2)} \qquad \text{où} \quad \Delta h = \sum h_{(1)} \otimes h_{(2)}.$$

Cette action fait de $H \otimes D$ un H-module à droite via Δ et φ est un morphisme de H-modules à droite pour cette structure.

Le produit tensoriel sur H de bimodules de Hopf est à nouveau un bimodule de Hopf, en conséquence les composantes homogènes de $T_H B$ sont des bimodules de Hopf. Précisément, si l'on note $\delta_1(b) = \sum b_{(-1)} \otimes b_{(0)}$ nous avons:

$$\delta_1(b_1 \otimes \cdots \otimes b_n) = \sum b_{1_{(-1)}} \cdots b_{n_{(-1)}} \otimes b_{1_{(0)}} \otimes \cdots \otimes b_{n_{(0)}}.$$

La structure de bicomodule à droite est donnée par la formule analogue.

Par conséquent, on peut appliquer le théorème de structure à chaque $B \otimes_H \cdots \otimes_H B$. On voit immédiatement, en utilisant $B = H \otimes V$ comme comodule à gauche, que les co-invariants à gauche $\{x \in B \otimes_H \cdots \otimes_H B \mid \delta_1(x) = 1 \otimes x\}$ sont isomorphes à $D \otimes_k \cdots \otimes_k D$. En effet, par exemple pour $n=2$ on a $(h \otimes d) \otimes_H (h' \otimes d') = (h \otimes d)\, h' \otimes_H (1 \otimes d')$, et $(h \otimes d) h' = \sum hh'_{(1)} \otimes d \cdot h'_{(2)} = \sum hh'_{(1)} \otimes S(h'_{(2)})\, dh'_{(3)}$ d'où l'isomorphisme $B \otimes_H B \to H \otimes_k D \otimes_k D$. L'isomorphisme $T_H B \to H \otimes T_k D$ de H-bimodules de Hopf gradués qui en résulte est aussi un morphisme d'algèbres associatives pour la structure d'algèbre croisée de $H \otimes T_k D$ décrite dans l'énoncé. En degré zéro ce morphisme est l'isomorphisme d'algèbres de Hopf $H \to H \otimes 1$ et en degré un il s'agit d'un morphisme de H-bimodules de Hopf précisément grâce au produit croisé défini sur $H \otimes T_k D$.

Remarque 4.5. Par transport de structure le produit croisé $H \otimes T_k D$ est une algèbre de Hopf.

Revenons maintenant au cas où H est une algèbre de groupe. Les exemples suivants montrent que les groupes quantiques s'obtiennent tous à partir de groupes abéliens.

Exemple 4.6. Soit G un groupe et supposons que la donnée des modules sur les centralisateurs des classes de conjugaison est zéro, i.e. $M(C) = 0$ pour tout $C \in \mathscr{C}$. Dans ce cas $A_{kG}M$ est l'algèbre de Hopf kG.

Exemple 4.7. Supposons qu'au-dessus de chaque classe de conjugaison du groupe G nous considérons la représentation de son centralisateur triviale de k-rang un. L'algèbre de Hopf peut alors être présentée par générateurs $[G] \sqcup (G)$ et relations $[g][h] = [gh]$, $[1] = 1$, et $(y)[g] = [g](g^{-1}yg)$. On a $\Delta(y) = [y] \otimes (y) + (y) \otimes 1$.

Exemple 4.8. Si G est un groupe abélien, ses classes de conjugaison sont constituées par les éléments de G et chaque centralisateur est le groupe tout entier.

Dans ce cas la famille $M = \{M(C)\}_{C \in \mathscr{C}}$ correspond à la donnée d'une représentation à droite $M(y)$ du groupe au dessus de chaque élément y de G. Effectuons le choix $t_x = 1$ pour tout $x \in G$; on obtient $\zeta_{y,g} = g$ pour tous y et g car $\zeta_{y,g}$ est défini par $t_y g = \zeta_{y,g} t_{g^{-1}yg}$.

En conséquence l'algèbre de Hopf $A_{kG}M$ est engendrée par l'ensemble $[G] \sqcup F$ où $F = \{(y, m) \mid y \in G \text{ et } m \in M(y)\}$ avec les relations de type 1, 2 et 3, ces dernières s'exprimant ici par $(y, m)[g] = [g](y, mg)$ où mg désigne l'action à droite de $g \in G$ sur l'élément $m \in M(y)$.

Supposons maintenant les modules $M(y)$ libres de rang fini sur k, et choisissons une k-base $\{e_1^y, ..., e_{m(y)}^y\}$ de chacun d'eux. L'action de G se décrit dans cette base par des matrices à coefficients dans k: $e_i^y g = \sum_{j=1}^{m(y)} g_{j,i}^y e_j^y$.

Nous en déduisons que $A_{kG}M$ est la k-algèbre libre engendrée par

$$[G] \sqcup \{(y, e_i^y) \mid y \in G, i = 1, ..., m(y)\}$$

modulo l'idéal bilatère des relations de type 1 et 3, ces dernières s'exprimant ici de la façon suivante:

$$(y, e_i^y)[g] = \sum_{j=1}^{m(y)} g_{j,i}^y [g](y, e_j^y) \qquad \text{pour } y \text{ et } g \text{ éléments de } G.$$

La comultiplication est donnée par les mêmes formules que dans le cas général.

Si de plus les représentations au-dessus de chaque élément de G sont de k-rang 0 ou 1, ce qui est précisément le cas lorsque le marquage m de G est à valeurs dans $\{0, 1\}$, on obtient que $A_{kG}M$ est engendrée par $[G] \sqcup (\text{supp}\, m)$ où $(\text{supp}\, m) = \{(y) \mid m(y) = 1\} = \{(y) \mid M(y) \neq 0\}$. Les relations sont celles de type 1 et 3, ces dernières s'expriment par: $(y)[g] = \chi_y(g)[g](y)$ pour $[g] \in [G]$, $(y) \in (\text{supp}\ m)$ et $\chi_y : G \to k^{\cdot}$ le caractère de la représentation de k-rang un $M(y)$.

Exemple 4.9. Soit G un groupe abélien de génération finie muni d'un système minimal de générateurs:

$$G = \langle \alpha_1, ..., \alpha_t, ..., \alpha_n \mid \alpha_j^{r_j} = 1 \text{ pour } j = 1, ..., t \rangle.$$

Ce groupe a t générateurs d'ordre fini et sa composante libre est de rang $n - t$.

Considérons une famille $M = \{M(g)\}_{g \in G}$ de modules concentrée au-dessus de chaque générateur: $M(\alpha_j) = ke^j$ pour tout j et $M(g) = 0$ si $g \neq \alpha_j$ pour tout j. L'action à droite de G sur le k-module libre de rang un ke^j est donnée par $e^j \alpha_i = q_{i,j} e^j$ où pour chaque j entre 1 et n le n-uple $(q_{1,j}, ..., q_{n,j})$ d'éléments de k vérifie $q_{i,j}^{r_i} = 1$ pour $i = 1, ..., t$ et $q_{i,j}$ inversible pour i entre $t + 1$ et n.

Le marquage de G qui en résulte vaut 1 sur les générateurs et 0 autrement; lorsque G est fini (i.e., $t = n$) le graphe de Cayley est sur un n-tore.

L'algèbre de Hopf $A_{kG}M$ que nous avons définie est engendrée ici par

$$\{[\alpha_j]\}_{j=1, ..., t} \sqcup \{[\alpha_j], [\alpha_j]^{-1}\}_{j=t+1, ...n} \sqcup \{(\alpha_j, e^j)\}_{j=1, ..., n}.$$

Nous remplaçons les générateurs (α_j, e^j) qui ne dépendent que de l'indice j par (α_j). L'idéal bilatère qui définit $A_{kG}M$ est engendré par les éléments correspondant aux relations suivantes:

Type 1. $[\alpha_i][\alpha_j] = [\alpha_j][\alpha_i]$ pour tous i et j; $[\alpha_j]^{r_j} = 1$ pour $j = 1, ..., t$ et $[\alpha_i][\alpha_i]^{-1} = [\alpha_i]^{-1}[\alpha_i] = 1$ pour $j = t + 1, ..., n$.

Type 3. $(\alpha_j)[\alpha_i] = q_{i,j}[\alpha_i](\alpha_j)$ pour tous i et j.

Rappelons que $A_{kG}M$ est isomorphe à l'algèbre tensorielle $T_{kG}VM$ qui est une algèbre de Hopf car VM est un kG-bimodule de Hopf. En conséquence $A_{kG}M$ est une algèbre de Hopf de comultiplication donnée par:

$$\Delta[\alpha_j] = [\alpha_j] \otimes [\alpha_j] \qquad \text{et} \qquad \Delta(\alpha_j) = [\alpha_j] \otimes (\alpha_j) + (\alpha_j) \otimes 1.$$

Des notations plus habituelles sont $[\alpha_j] = K_j$ et $(\alpha_j) = E_j$.

Proposition 4.10. *Soient $(q_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ des éléments inversibles d'un anneau k vérifiant $q_{i,j}^{r_i} = 1$ pour des entiers positifs r_i avec $i \leqslant t$ où t est un entier au plus égal à n. Considérons l'algèbre de Hopf A de l'exemple précédent; elle est engendrée par $\{K_i\}_{i=1,\dots,t} \sqcup \{E_i\}_{i=1,\dots,n}$ soumis aux relations*

Type 1. *$K_iK_j = K_jK_i$ pour tous i et j, $K_i^{r_i} = 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant t$, $K_iK_i^{-1} = K_i^{-1}K_i = 1$ pour $t+1 \leqslant i \leqslant n$.*

Type 3. *$E_jK_i = q_{i,j}K_iE_j$ pour tous i et j.*

(a) *Soit (i,j) un couple d'indices de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ pour lequel $q_{j,i} = q_{i,j}^{-1}$. L'idéal bilatère*

$$\langle E_iE_j - q_{i,j}^{-1}E_jE_i \rangle$$

est un idéal de Hopf.

(b) *Soit (i,j) un couple d'indices de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ pour lequel $q_{j,i} = q_{i,j}$ et $q_{i,i} = 1/q_{i,j}^2$. L'idéal bilatère*

$$\langle E_i^2E_j - (q_{i,j} + q_{i,j}^{-1})\, E_iE_jE_i + E_jE_i^2 \rangle$$

est un idéal de Hopf.

Preuve. Soit γ l'élément de l'algèbre de Hopf A décrit en (a) ou (b). Il suffit d'établir dans chaque cas que $\Delta\gamma \in A \otimes \langle\gamma\rangle + \langle\gamma\rangle \otimes A$, ce qui se fait par calcul direct. L'antipode fournie par le lemme 2.1 préserve à chaque fois l'idéal.

Remarque 4.11. Soit $C = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ une matrice de Cartan symétrique: $a_{i,j} \in \{0, -1\}$ si $i \neq j$, $a_{i,j} = a_{j,i}$ et $a_{i,i} = 2$. Considérons l'algèbre de la proposition précédente fournie par un groupe abélien de rang n en posant $q_{i,j} = q^{a_{i,j}}$ pour tous i et j où q est un élément inversible de l'anneau k vérifiant $q^{r^j} = 1$ pour $j = 1, \dots, t$ si $t \neq 0$, i.e. si G a de la torsion.

Pour les couples d'indices (i,j) tels que $a_{i,j} = 0$, on a $q_{j,i} = q_{i,j}^{-1} = 1$ et l'hypothèse (a) de la proposition 4.10 est satisfaite.

Lorsque $a_{i,j} = -1$ on a $q_{j,i} = q_{i,j} = q^{-1}$ et de plus $q_{i,i} = q^2 = 1/(q^{-1})^2$. L'hypothèse (b) de 4.10 est alors satisfaite.

En conséquence l'idéal bilatère engendré par les éléments

$$E_iE_j - E_jE_i \qquad \text{pour} \quad (i, j) \text{ avec } a_{i,j} = 0 \text{ et}$$

$$E_i^2 E_j - (q+q^{-1})\, E_iE_jE_i + E_jE_i{}^2 \qquad \text{pour} \quad (i, j) \text{ avec } a_{i,j} = -1$$

est un idéal de Hopf.

L'algèbre quotient est notée $U_q^+(C)$, c'est la sous-algèbre positive des groupes quantiques introduits par Jimbo et Drinfeld, [3–6].

Exemple 4.12. Soit G le groupe cyclique infini avec un générateur désigné α marqué avec le nombre 2: la famille de k-modules au dessus de chaque élément de G est donnée par $M(g) = 0$ si $g \neq \alpha$ et $M(\alpha) = ke \oplus kf$. Ce dernier k-module libre de rang 2 est un kG-module à droite par action diagonale du générateur:

$$e\alpha = qe \qquad \text{et} \qquad f\alpha = pf.$$

L'algèbre de Hopf $A_{kG}M$ est présentée par générateurs $[\alpha]$, $[\alpha]^{-1}$, (α, e), (α, f) et relations:

Type 1. $[\alpha][\alpha]^{-1} = [\alpha]^{-1}[\alpha] = 1.$

Type 3. $(\alpha, e)[\alpha] = q[\alpha](\alpha, e)$ et $(\alpha, f)[\alpha] = p[\alpha](\alpha, f).$

Rappelons que $\Delta(\alpha, e) = (\alpha, e) \otimes 1 + [\alpha] \otimes (\alpha, e)$ et $\Delta(\alpha, f) = (\alpha, f) \otimes 1 + [\alpha] \otimes (\alpha, f)$.

Changeons les notations tout en modifiant le quatrième générateur:

$$K = [\alpha], \qquad K^{-1} = [\alpha]^{-1}, \qquad E = (\alpha, e), \qquad F = [\alpha]^{-1}(\alpha, f).$$

Nous obtenons $EK = qKE$ et $FK = pKF$ tandis que $\Delta E = E \otimes 1 + K \otimes E$ et $\Delta F = F \otimes K^{-1} + 1 \otimes F$.

Assertion. L'idéal bilatère de $A_{kG}M$ engendré par $EF - FE = a(K - K^{-1})$ est un idéal de Hopf pour tout $a \in k$ dès que $p = q^{-1}$. Cela suit d'un calcul direct.

Remarque 4.13. Dans l'exemple précédent 4.12, si q est le carré d'un élément inversible et $p = q^{-1}$, l'algèbre de Hopf quotient de $A_{kG}M$ par l'idéal bilatère de l'assertion spécifié en $a = 1/\sqrt{q} - \sqrt{q}^{-1}$ est le groupe quantique $U_q(sl_2)$, analogue quantique de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie sl_2.

Exemple 4.14. Dans cet exemple nous montrons que les groupes quantiques associés aux matrices de Cartan symétriques introduits par Jimbo et Drinfeld (voir [3–6]) sont des algèbres tensorielles d'un bimodule de Hopf sur une algèbre de groupe commutatif modulo un idéal bilatère ad-hoc; ce dernier est un idéal de Hopf précisément car la matrice de départ est une matrice de Cartan.

Soit G un groupe abélien de type fini comme à l'exemple 4.9,

$$G=\langle \alpha_1, ..., \alpha_t, ..., \alpha_n \mid \alpha_j^{r_j}=1 \text{ pour } 1 \leqslant j \leqslant t\rangle.$$

Considérons une famille $M=\{M(g)\}_{g\in G}$ de kG-modules de k-rang 2 concentrés au-dessus de chaque générateur:

$$M(\alpha_j)=ke^j \oplus kf^j \text{ pour tout } j \text{ de } 1 \text{ à } n.$$

On suppose $M(g)$ nul si g n'est pas l'un des générateurs. Chaque $M(\alpha_j)$ est l'espace d'une représentation diagonale de G:

$$e^j\alpha_i=q_{i,j}e^j \qquad \text{et} \qquad f^j\alpha_i=p_{i,j}f^j$$

où les n-uples des q et p sont des éléments inversibles de $k^{\cdot}$ avec $q_{i,j}^{r_i}=p_{i,j}^{r_i}=1$ pour i entre 1 et t.

L'algèbre de Hopf tensorielle $T_{kG}VM$ est isomorphe à l'algèbre de Hopf $A_{kG}M$ (proposition 4.1). Cette dernière est par définition engendrée par

$$\{[\alpha_j]\}_{j=1,...,t} \sqcup \{[\alpha_j], [\alpha_j]^{-1}\}_{j=t+1,...n}$$
$$\sqcup \{(\alpha_j, e^j)\}_{j=1,...,n} \sqcup \{(\alpha_j, f^j)\}_{j=1,...,n}.$$

Les relations sont celles de type 1 et celles de type 3; ces dernières s'écrivent:

$$(\alpha_j, e_j)[\alpha_i]=q_{i,j}[\alpha_i](\alpha_j, e_j) \qquad \text{et} \qquad (\alpha_j, f_j)[\alpha_i]=p_{i,j}[\alpha_i](\alpha_j, f_j).$$

Changeons les notations en modifiant les derniers générateurs:

$$K_j=[\alpha_j], \qquad K_j^{-1}=[\alpha_j]^{-1}, \qquad E_j=(\alpha_j, e_j) \qquad \text{et} \qquad F_j=[\alpha_j]^{-1}(\alpha_j, f_j).$$

En conséquence l'algèbre engendrée par les générateurs

$$\{[K_j]\}_{j=1,...,t} \sqcup \{[K_j], [K_j]^{-1}\}_{j=t+1,...n} \sqcup \{E_j\}_{j=1,...,n} \sqcup \{F_j\}_{j=1,...,n}$$

soumis aux relations

$$K_iK_j=K_jK_i, \qquad K_j^{r_j}=1 \quad (j=1\cdots t),$$
$$K_jK_j^{-1}=K_j^{-1}K_j=1 \qquad\qquad (j=t+1, ...n)$$
$$E_jK_i=q_{i,j}K_iE_j \qquad \text{et} \qquad F_jK_i=p_{i,j}K_iF_j$$

est une algèbre de Hopf de comultiplication

$$\Delta E_i = E_i \otimes 1 + K_i \otimes E_i \qquad \text{et} \qquad \Delta F_i = F_i \otimes K_i^{-1} + 1 \otimes F_i.$$

Indiquons maintenant les relations de Hopf qu'admet cette algèbre:

(a) Si $q_{j,i} = q_{i,j}^{-1}$ l'idéal bilatère

$$\langle E_i E_j - q_{j,i} E_j E_i \rangle$$

est un idéal de Hopf.

(a′) Si $p_{j,i} = p_{i,j}^{-1}$ l'idéal bilatère

$$\langle F_i F_j - p_{i,j} F_j F_i \rangle$$

est un idéal de Hopf.

(b) Si $q_{i,j} = q_{j,i}$ et $q_{i,i} = q_{i,j}^{-2}$ l'idéal bilatère

$$\langle E_i^2 E_j - (q_{i,j} + q_{i,j}^{-1})\, E_i E_j E_i + E_j E_i^2 \rangle$$

est un idéal de Hopf.

(b′) Si $p_{i,j} = p_{j,i}$ et $p_{i,i} = p_{i,j}^2$ l'idéal bilatère

$$\langle F_i^2 F_j - (p_{i,j} + p_{i,j}^{-1})\, F_i F_j F_i + F_j F_i^2 \rangle$$

est un idéal de Hopf.

(c) Si $p_{i,i} = q_{i,i}^{-1}$ l'idéal bilatère

$$\langle E_i F_i - F_i E_i - a(K_i - K_i^{-1}) \rangle$$

est un idéal de Hopf pour tout $a \in k$.

(d) Si $q_{j,i} = p_{i,j}^{-1}$ alors $\langle E_i F_j - F_j E_i \rangle$ est un idéal de Hopf.

Soit maintenant C une matrice de Cartan et q un élément inversible de k, avec $q^{r_j} = 1$ pour $j = 1, \ldots t$. Si G n'a pas de torsion cette dernière condition est vide.

Posons $q_{i,j} = q^{a_{i,j}}$ et $p_{i,j} = q^{-a_{i,j}}$. On constate que lorsque $a_{i,j} = 0$ les conditions de (a) et (a′) sont vérifiées, tandis que si $a_{i,j} = -1$ ce sont celles de (b) et (b′) qui le sont. Les conditions de (c) et (d) sont toujours vérifiées.

L'algèbre de Hopf obtenue en faisant le quotient par les relations (a), (a′) pour tous les couples (i, j) avec $a_{i,j} = 0$, par les relations (b), (b′) pour tous les couples (i, j) avec $a_{i,j} = -1$, par les relations (c) spécifiées en $a = 1/q - q^{-1}$, et finalement par les relations (d) pour $i \neq j$ est le groupe quantique associé à la matrice de Cartan C.

5. TRANSFORMÉE DE FOURIER DES BIMODULES DE HOPF

Dans cette section G désigne un groupe abélien fini et k un corps contenant toutes les racines de l'unité d'ordre l'exposant de G.

Considérons B un kG-bimodule de Hopf de dimension finie; nous nous proposons d'établir un isomorphisme entre les algèbres de Hopf $T_{kG}B$ et $T_{k^G}B'$ pour B' un k^G bimodule de Hopf déduit de B grâce à la transformée de Fourier des kG-bimodules de Hopf que nous introduisons. Par ce biais nous obtiendrons les algèbres de Hopf $T_{kG}B$ isomorphes à $T_{k^G}B^*$.

Commençons par rappeler quelques faits bien connus. Nous supposons G muni d'un système minimal de générateurs $\{\alpha_1, ..., \alpha_t\}$. Chaque choix $\omega = \{\omega_1, ..., \omega_t\}$ de racines de l'unité dans $k^{\cdot}$ avec ordre $\omega_i =$ ordre α_i détermine un isomorphisme χ^ω: $kG \to k^G$ où kG désigne l'algèbre de Hopf du groupe et k^G l'algèbre de Hopf des fonctions sur G. A chaque élément $\alpha^x = \alpha_1^{x_1} \cdots \alpha_t^{x_t}$ de G l'homomorphisme χ^ω associe le caractère $\chi^\omega_{\alpha^x}$ déterminé par $\chi^\omega_{\alpha^x}(\alpha^y) = \omega^{xy}$ où $\omega^{xy} = \omega_1^{x_1 y_1} \cdots \omega_t^{x_t y_t}$. Cette indexation des caractères irréductibles de G par des éléments de G dépend du choix ω effectué. L'isomorphisme inverse associe à un élément de base δ_{α^x} de k^G l'élément $1/|G| \sum_{\alpha^y \in G} \chi^\omega_{\alpha^x}(\alpha^{-y})\, \alpha^y = 1/|G| \sum_{\alpha^y \in G} \omega^{-xy} \alpha^y$. Ces isomorphismes d'algèbres de Hopf sont considérés comme une expression de la transformée de Fourier.

Définition. Soit $b(kG)$ la catégorie des kG-bimodules de Hopf de k-dimension finie et soit ω un choix de racines de l'unité effectué comme précédemment. La *transformée de Fourier* est l'endofoncteur $\mathscr{F}^\omega$: $b(kG) \to b(kG)$ défini par $\mathscr{F}^\omega B = X^\omega(B^*)$ où B^* désigne le k^G-bimodule de Hopf obtenu en dualisant les actions et coactions de B (voir le lemme 3.2) et X^ω: $b(k^G) \to b(kG)$ est le foncteur de restriction et corestriction des scalaires par l'isomorphisme χ^ω d'algèbres de Hopf.

Nous allons interpréter la transformée de Fourier en tant qu'endofoncteur de $\times_{g \in G}$ *mod* kG en utilisant les équivalences V et W de la preuve de la proposition 3.3. En particulier nous obtiendrons que $\mathscr{F}^\omega$ est involutif.

Tout objet de *mod* kG est isomorphe à $\bigoplus_{h \in G} m_h S_h$ où S_h est le module simple de dimension 1 dont le caractère est χ^ω_h. Le caractère de cette somme directe est $\sum_{h \in G} m_h \chi^\omega_h$ et la suite $\{m_h\}_{h \in G}$ caractérise la classe d'isomorphisme du kG-module.

Soit maintenant $M \in \times_{g \in G}$ *mod* kG une famille de kG-modules au dessus de chaque élément de G. Nous avons $M(g) = \bigoplus_{h \in G} m_h(g) S_h$ et la matrice carrée d'entiers positifs ou nuls $\{m_h(g)\}_{h, g \in G}$ caractérise M à isomorphisme près. Noter que le marquage de G déterminé par VM est donné par $m(g) = \sum_{h \in G} m_h(g)$.

Définition. Soit M un objet de $\times_{g \in G}$ *mod* kG de matrice $\{m_h(g)\}_{h, g \in G}$. Le transformé de M noté $\bar{M}$ est l'objet de $\times_{g \in G}$ *mod* kG caractérisé par la matrice $\{m_h(g)\}_{h,\, g \in G}$ où $\bar{m}_h(g) = m_{g^{-1}}(h^{-1})$. Noter que $\bar{M}$ dépend du choix ω de racines de l'unité.

Proposition 5.1. *Soit VM un kG-bimodule de Hopf donné au moyen d'un objet M de $\times_{g \in G} \operatorname{mod} kG$. Alors $\mathscr{F}^{\omega}(VM) \cong V\bar{M}$.*

Preuve. Par additivité il suffit de démontrer le résultat pour $M \in \times_{g \in G} \operatorname{mod} kG$ donné par une matrice élémentaire: $m_{\alpha^b}(\alpha^a) = 1$ pour $\alpha^a = \alpha_1^{a_1} \cdots \alpha_t^{a_t}$ et $\alpha^b = \alpha_1^{b_1} \cdots \alpha_t^{b_t}$ des éléments fixés de G, tandis que $m_h(g) = 0$ si $h \neq \alpha^b$ et $g \neq \alpha^a$. Pour cet objet M nous allons établir que $W\mathscr{F}^{\omega}(VM) \cong \bar{M}$ ce qui équivaut à $\mathscr{F}^{\omega}(VM) \cong V\bar{M}$.

Les cocomposantes isotypiques du kG-bimodule de Hopf VM sont

$$^{\alpha^{x+a}}(VM)^{\alpha^x} = ke_x \qquad \text{pour} \quad \alpha^x \in G \text{ et } {}^{\alpha^y}(VM)^{\alpha^x} = 0 \qquad \text{si} \quad \alpha^y \alpha^{-x} \neq \alpha^a.$$

Les actions de G préservent ces cocomposantes isotypiques et l'on a $\alpha^y e_x = e_{x+y}$ et $e_x \alpha^y = \omega^{by} e_{x+y}$. Pour décrire $\mathscr{F}^{\omega}(VM)$ considérons d'abord le k^G-bimodule de Hopf dual de VM. Ses composantes isotypiques sont:

$$\delta_{\alpha^{x+a}}(VM)^* \, \delta_{\alpha^x} = ke_x^* \qquad \text{et} \qquad \delta_{\alpha^y}(VM)^* \, \delta_{\alpha^x} = 0 \qquad \text{si} \quad \alpha^y \alpha^{-x} \neq \alpha^a.$$

Les coactions gauche et droite sont données par:

$$\delta_1 e_x^* = \sum_{\alpha^y \alpha^z = \alpha^x} \delta_{\alpha^y} \otimes e_z^* \qquad \text{et} \qquad \delta_2 e_x^* = \sum_{\alpha_y \alpha_z = \alpha_x} \omega^{bz} e_y^* \otimes \delta_{\alpha^z}.$$

En utilisant l'isomorphisme χ^{ω} et son inverse décrits précédemment on obtient la transformée de Fourier $\mathscr{F}^{\omega}(VM)$ dont les coactions sont:

$$\begin{aligned}
(X^{\omega}\delta_1)\, e_x^* &= \frac{1}{|G|} \sum_{\alpha^y \alpha^z = \alpha^x} \sum_{\alpha^u \in G} \omega^{-yu} \alpha^u \otimes e_z^* \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{\alpha^y,\, \alpha^z \in G} \omega^{-y(x-z)} \alpha^y \otimes e_z^* \qquad \text{et} \\
(X^{\omega}\delta_2)\, e_x^* &= \frac{1}{|G|} \sum_{\alpha^y \alpha^z = \alpha^x} \sum_{\alpha^u \in G} \omega^{bz} \omega^{-uz} e_y^* \otimes \alpha^u \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{\alpha^y,\, \alpha^z \in G} \omega^{(b-z)(x-y)} e_y^* \otimes \alpha^z.
\end{aligned}$$

La cocomposante isotypique droite $(\mathscr{F}^{\omega}(VM))^1$ est engendrée en tant qu'espace vectoriel par $\lambda = \sum_{\alpha^x \in G} \omega^{-bx} e_x^*$. En effet,

$$(X^{\omega}\delta_2)(\lambda) = \frac{1}{|G|} \sum_{\alpha^x,\, \alpha^y,\, \alpha^z \in G} \omega^{-bx} \omega^{(b-z)(x-y)} e_y^* \otimes \alpha^z$$

et il est facile d'établir que le coefficient de $e_y^* \otimes 1$ est bien ω^{-by} tandis qu'il est 0 pour $e_y^* \otimes \alpha^z$ avec $\alpha^z \neq 1$.

De même il est aisé de constater que λ est dans la cocomposante isotypique gauche ${}^{\alpha^{-b}}(\mathscr{F}^{\omega}(VM))$ car $(X^{\omega}\delta_1)(\lambda) = \alpha^{-b} \otimes \lambda$, ce qui montre déjà que $W(\mathscr{F}^{\omega}(VM))$ est une famille de kG-modules nulle au dessus des éléments de G distincts de α^{-b}.

La structure de kG-module à droite au-dessus de α^{-b} s'obtient en conjuguant la composante isotypique ${}^{\alpha^{-b}}(\mathscr{F}^{\omega}(VM))^1 = k\lambda$ par les actions droite et gauche. Répertorions pour cela les actions sur la transformée de Fourier:

$$e_x^* . \alpha^y = e_x^* \chi_{\alpha^y}^{\omega} = e_x^* \left(\sum_z \omega^{yz} \delta_{\alpha^z} \right) = \sum_z \omega^{yz} e_x^* \delta_{\alpha^z} = \omega^{yx} e_x^*$$

$$\alpha^y . e_x^* = \chi_{\alpha^y}^{\omega} e_x^* = \left(\sum_z \omega^{yz} \delta_{\alpha^z} \right) e_x^* = \omega^{y(x+a)} e_x^*.$$

Nous obtenons alors:

$$\alpha^{-y} . \lambda . \alpha^y = \alpha^{-y} . \left(\sum_x \omega^{-bx} e_x^* \right) . \alpha^y = \sum_x \omega^{-y(x+a)} \omega^{-bx} \omega^{yx} e_x^* = \omega^{-ay} \lambda$$

ce qui montre que $W(\mathscr{F}^{\omega}(VM))$ au-dessus de α^{-b} est le kG-module simple $S_{\alpha^{-a}}$.

COROLLARY 5.2. *La transformée de Fourier des bimodules de Hopf est involutive.*

Preuve. Soit $B \in b(kG)$ et soit $M \in \times_{g \in G} \operatorname{mod} kG$ tel que $B = VM$. Nous avons montré que $\mathscr{F}^{\omega} B \cong V\bar{M}$, donc $(\mathscr{F}^{\omega})^2 B \cong V\bar{\bar{M}}$. Or il est clair que $\bar{\bar{M}} = M$.

Enonçons maintenant les résultats mentionnés au début de cette section:

THÉORÈME 5.3. *Soit $B = VM$ un KG-bimodule de Hopf donné au moyen d'un objet $M \in \times_{g \in G} \operatorname{mod} kG$. L'algèbre de Hopf $T_{kG}B$ est isomorphe à $T_{k^G}(V\bar{M})$.*

Preuve. Soit ω un choix de racines de l'unité effectué comme précédemment. Le transformé $\bar{M}$ que nous considérons est celui qui correspond à ce choix. Un isomorphisme ψ: $T_{kG} VM \to T_{k^G}(V\bar{M})^*$ d'algèbres de Hopf graduées est complétement déterminé par un isomorphisme d'algèbres de Hopf ψ_0: $kG \to k^G$ et par ψ_1: $VM \to (V\bar{M})^*$ un isomorphisme de kG-bimodules de Hopf où il faut bien sûr entendre que le k^G-bimodule de Hopf $(V\bar{M})^*$ est considéré comme kG-bimodule de Hopf à travers ψ_0.

Considérons l'isomorphisme $\psi_0 = \chi^\omega$ déterminé par le choix ω de racines de l'unité et vérifions que VM est un kG-bimodule de Hopf isomorphe à $X^\omega(V\bar{M})^*$. Selon la proposition 5.1 nous avons que $X^\omega(VN)^* \cong V\bar{N}$ pour tout kG-bimodule de Hopf N. Pour $N = \bar{M}$ on en déduit que $X^\omega(V\bar{M})^* \cong VM$ puisque $\bar{\bar{M}} = M$.

PROPOSITION 5.4. *Soit $B = VM$ un kG-bimodule de Hopf. L'algèbre de Hopf $T_{kG}B$ est isomorphe à $T_{k^G}B^*$ si et seulement si il existe un choix de racines de l'unité ω pour lequel $\bar{M} = M$.*

Preuve. En degré zéro les isomorphismes $kG \to k^G$ d'algèbre de Hopf sont en bijection avec les choix ω de racines de l'unité associées à un système minimal de générateurs de G. Soit $\chi^\omega: kG \to k^G$ un tel isomorphisme. Un isomorphisme d'algèbres de Hopf $T_{kG}B \to T_{k^G}B^*$ prolongeant χ^ω est déterminé par un isomorphisme de kG-bimodules de Hopf $\varphi: B \to X^\omega B^*$. Or si $B = VM$, on a $X^\omega B^* = X^\omega(VM)^* = \mathscr{F}^\omega(VM) \cong V\bar{M}$. Puisque V est une équivalence de catégories, φ n'existe que lorsque $M = \bar{M}$.

EXEMPLE 5.5. Soit $G = \langle \alpha \mid \alpha^r = 1 \rangle$ et q une racine primitive r-ième de l'unité fixée. Considérons M une famille de kG-modules à droite concentrée au-dessus de α, on a $M(\alpha) = ke$ avec $e\alpha = qe$. L'algèbre $A_{kG}M = T_{kG}VM$ est $U^+_{\sqrt{q}}$ considérée à la remarque 4.13, voir aussi 4.11.

Identifions kG et k^G au moyen de q la racine de l'unité que nous avons choisi. Le module $M(\alpha)$ est alors le module simple indexé par α, on a $m_\alpha(\alpha) = 1$ et $m_h(g) = 0$ autrement; ainsi $\bar{m}_{\alpha^{-1}}(\alpha^{-1}) = 1$ puisque $\bar{m}_h(g) = m_{g^{-1}}(h^{-1})$ et donc $M \neq \bar{M}$.

Si par contre nous identifions kG et k^G au moyen de q^{-1} (l'inverse de la racine de l'unité choisie au début), le module $M(\alpha)$ correspond à α^{-1} au travers de $\chi^{q^{-1}}$. Ainsi $m_{\alpha^{-1}}(\alpha) = 1$ et $m_h(g) = 0$ autrement. On a $\bar{m}_{\alpha^{-1}}(\alpha) = 1$ c'est à dire que $\bar{M} = M$ pour ce choix de racine de l'unité.

Les isomorphismes décrits permettent d'établir un résultat d'existence de bases multiplicatives pour les algèbres de Hopf considérées.

DÉFINITION. Un *ensemble multiplicatif* d'une k-algèbre associative graduée A est une k-base de la composante de degré 1 telle que l'ensemble des produits non nuls de n éléments de cette base est une k-base de la composante de degré n pour tout $n \geqslant 1$. Les produits finis non nuls des éléments d'un ensemble multiplicatif constituent une *base multiplicative* de A.

THÉORÈME 5.6. *Si B est un kG-bimodule de Hopf l'algèbre tensorielle $T_{kG}B$ admet un ensemble multiplicatif. En conséquence l'algèbre $A_{kG}WB$ qui lui est isomorphe admet un ensemble multiplicatif pour la graduation associée.*

Preuve. L'existence d'un ensemble multiplicatif suit de l'isomorphisme entre les algèbres de Hopf $T_{kG}B$ et $T_{k^G}[V(\overline{WB})]^*$ du théorème 5.3. En effet cette dernière algèbre est celle des chemins d'un carquois puisque k^G est une algèbre semi-simple qui est le produit de copies de k. Or l'ensemble des flèches d'un carquois forme un ensemble multiplicatif de son algèbre des chemins.

Remarquons que l'expression de cet ensemble multiplicatif dans $T_{kG}B$ dépend de l'isomorphisme choisi.

6. CARQUOIS DE $U_q(sl_2)$

Lorsque G est un groupe abélien fini et k un corps contenant toutes les racines de l'unité d'ordre l'exposant de G nous avons vu à la section précédente que l'algèbre de Hopf $T_{kG}VM$ est isomorphe à $T_{k^G}(V\bar{M})^*$ où VM est un kG-bimodule de Hopf déterminé par la famille M de kG-modules au-dessus de chaque élément de G et $\bar{M}$ la famille transformée déterminée par un choix ω de racines de l'unité associées à un ensemble minimal de générateurs de G.

L'algèbre $T_{k^G}(V\bar{M})^*$ est l'algèbre des chemins d'un carquois puisque k^G est une algèbre semi-simple commutative de dimension finie. Le nombre de flèches de δ_h à δ_g est la dimension de la cocomposante isotypique $\delta_g(V\bar{M})^*\,\delta_h$ du k^G-bimodule $(V\bar{M})^*$.

PROPOSITION 6.1. *Soit q une racine de l'unité d'ordre r. Le carquois de $U_q(sl_2)$ a pour sommets l'ensemble des entiers modulo r; de chaque sommet x partent deux flèches: a_x de terminus $x-2$ et b_x de terminus $x+2$.*

Preuve. Rappelons comment nous obtenons $U_q(sl_2)$ pour q une racine r-ième de l'unité (Remarque 4.13): nous considérons le groupe cyclique $G=\langle \alpha \mid \alpha^r=1\rangle$ et M une famille de kG-modules concentrée au-dessus du générateur: $M(\alpha)=ke\oplus kf$ avec action à droite donnée par $e\alpha=q^2e$ et $f\alpha=q^{-2}f$. Le kG-bimodule de Hopf VM fournit l'algèbre tensorielle $T_{kG}VM$ qui peut être présentée selon la proposition 4.1 par générateurs K, E et F et relations $K^r=1$, $EK=q^2KE$ et $FK=q^{-2}KF$, où $K=[\alpha]$, $E=(\alpha,e)$ et $F=[\alpha]^{-1}(\alpha,f)$. Le choix de racine de l'unité q donne un isomorphisme d'algèbres de Hopf $\chi\colon kG\to k^G$ avec $\chi^q(\alpha)=\sum q^x\delta_{\alpha^x}$. La matrice $r\times r$ qui caractérise M est donnée par $m_{\alpha^2}(\alpha)=m_{\alpha^{-2}}(\alpha)=1$ et $m_h(g)=0$ autrement. La matrice caractérisant la famille transformée $\bar{M}$ est $\bar{m}_{\alpha^{-1}}(\alpha^{-2})=\bar{m}_{\alpha^{-1}}(\alpha^2)=1$, autrement dit $\bar{M}$ prend ses valeurs au-dessus de α^{-2} et α^2. Les deux kG-modules à droite sont isomorphes et de dimension 1. Leur caractère est donné par $\alpha\mapsto q^{-1}$.

La définition du foncteur V montre que les cocomposantes isotypiques de $V\bar{M}$ vérifient

$$dim_k\, {}^{\alpha^{x-2}}(V\bar{M})^{\alpha^x} = dim_k\, {}^{\alpha^{x+2}}(V\bar{M})^{\alpha^x} = 1$$

pour tout $\alpha^x \in G$. Toute autre cocomposante isotypique est nulle. Les dimensions des composantes isotypiques de $(V\bar{M})^*$ fournissent donc les carquois énoncés.

L'algèbre de Hopf $U_q(sl_2)$ est le quotient de l'algèbre $T_{kG}VM$ décrite plus haut par la relation $EF - FE = (1/q - q^{-1})(K - K^{-1})$ qui engendre un idéal bilatère qui est un idéal de Hopf. Le résultat suivant traduit cette relation au niveau de l'algèbre des chemins du carquois.

Proposition 6.2. *L'algèbre $U_q(sl_2)$ pour q une racine r-ième de l'unité est le quotient de l'algèbre des chemins du carquois de la proposition* 6.1 *par l'idéal bilatère engendré par*

$$\left\{ q^{x+2}(q^2 a_{x+2} b_x - b_{x-2} a_x) = \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}}\, \delta_{\alpha^x} \right\}_{\alpha^x \in G}.$$

Preuve. Nous souhaitons composer les isomorphismes $A_{kG}M \to T_{kG}VM$ de la proposition précédente et $T_{kG}VM \to T_{k^G}(VM)^*$, ce dernier étant celui de la proposition 5.1 spécifié en la famille transformée de la famille M. Précisons les notations: $\{e_x, f_x\}$ est la base de ${}^{\alpha^{x+1}}VM^{\alpha^x}$ avec $\alpha^y e_x = e_{x+y}$, $e_x \alpha^y = q^{2y} e_{x+y}$, $\alpha^y f_x = f_{x+y}$, $f_x \alpha^y = q^{-2y} f_{x+y}$. En ce qui concerne $V\bar{M}$ la base de la cocomposante isotypique ${}^{\alpha^{x-2}}(V\bar{M})^{\alpha^x}$ est e_x et celle de ${}^{\alpha^{x+2}}(V\bar{M})^{\alpha^x}$ est $\bar{f}_x$. On a $\alpha^y \bar{e}_x = \bar{e}_{x+y}$, $\bar{e}_x \alpha^y = q^{-y} \bar{e}_{x+y}$, $\alpha^y \bar{f}_x = \bar{f}_{x+y}$, $\bar{f}_x \alpha^y = q^{-y} \bar{f}_{x+y}$. Les composantes isotypiques du k^G-bimodule de Hopf $(V\bar{M})^*$ sont donc

$$\delta_{x-2}(V\bar{M})^*\, \delta_x = k(e_x)^* \qquad \text{et} \qquad \delta_{x+2}(V\bar{M})^*\, \delta_x = k(\bar{f}_x)^*.$$

En cohérence avec l'énoncé de la proposition précédente, posons $(\bar{e}_x)^* = a_x$ et $(\bar{f}_x)^* = b_x$. Par ailleurs nous identifions $\bar{\bar{M}}$ et M de la façon évidente. La composée d'isomorphismes mentionée au début de cette preuve opère de la façon suivante:

$$K = [\alpha] \mapsto \alpha \mapsto \sum q^x \delta_{\alpha^x}$$

$$E = (\alpha, e) \mapsto e_0 \mapsto \sum q^x a_x$$

$$F = [\alpha]^{-1}(\alpha, f) \mapsto \alpha^{-1} f_0 = f_{-1} \mapsto q^2 \sum b_x.$$

Il est acquis d'avance que les relations $EK - q^2KE$ et $FK - q^{-2}KF$ ont image nulle par cette composée, il est toutefois possible de procéder à la vérification directe.

La relation $EF - FE = 1/q - q^{-1}(K - K^{-1})$ se traduit par

$$\sum q^{x+2}(q^2 a_{x+2} b_x - b_{x-2} a_x) = \frac{1}{q - q^{-1}} \sum (q^x - q^{-x})\, \delta_{\alpha^x}.$$

En multipliant cette égalité à gauche et à droite par l'idempotent δ_{α^x} on obtient les relations énoncées qui à leur tour ont pour conséquence la relation précédente.

RÉFÉRENCES

1. C. Cibils, A quiver quantum group, *Comm. Math. Phys.* **157** (1993), 459–477.
2. D. Dijkgraaf, V. Pasquier, et P. Roche, Quasi Hopf algebras, group cohomology and orbifold models, *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* **18** (1990), 60–72.
3. V. G. Drinfeld, Quantum groups, *in* "Proceedings, International Congress of Mathematicians," Vol. 1, pp. 798–820, Academic Press, New York, 1986.
4. V. G. Drinfeld, Hopf algebras and the quantum Yang–Baxter equation, *Sov. Math. Dokl.* **32** (1985), 254–258.
5. M. Jimbo, A q-difference analog of $U(\mathscr{G})$ and the Yang–Baxter equation, *Lett. Math. Phys.* **10** (1985), 63–69.
6. M. Jimbo, A q-analog of $U(gl(N+1))$, Hecke algebras and the Yang–Baxter equation, *Lett. Math. Phys.* **11** (1986), 247–252.
7. G. Lusztig, Leading coefficients of character values of Hecke algebras, *in* "Arcata Conference on Representations of Finite Groups," Proc. of Symp. in Pure Math., Vol. 47, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.
8. W. D. Nichols, Bialgebras of type one, *Comm. Algebra* **6** (1978), 1521–1552.
9. M. Rosso, Algèbres enveloppantes quantifiées, groupes quantiques compacts de matrices et calcul différentiel non commutatif, *Duke Math. J.* **61** (1978), 11–40.
10. M. Rosso, Groupes quantiques et algèbres de battages quantiques, *C.R. Acad. Sci. Paris* **320** (1995), 145–148.
11. M. E. Sweedler, "Hopf Algebras," Benjamin, New York, 1969.
12. M. Takeuchi, Free Hopf algebras generated by coalgebras, *J. Math. Soc. Jap.* **23** (1971), 561–581.
13. S. L. Woronowicz, Differential calculus on compact matrix pseudogroups (quantum groups), *Comm. Math. Phys.* **122** (1989), 125–170.